Laplace Dönüşümü ve Özellikleri

Tanım: f, $[0,\infty)$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer

$\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx$ integrali mevcut (veya yakınsak) ise, s nin bir

fonksiyonu olan

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx$$

dönüşümüne f nin Laplace dönüşümü denir.

f nin Laplace dönüşümü $L(f(x)) = F(s)$ ile gösterilir.

Örnek: $f(x) = 1$ için $L(f(x)) = ?$

$$L(1) = \int_0^\infty e^{-sx} \cdot 1 \cdot dx = \lim_{\beta\to\infty} \int_0^\beta e^{-sx} dx = \lim_{\beta\to\infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-sx}\right)\Big|_0^\beta$$

$$= \lim_{\beta\to\infty} \left(\underbrace{-\frac{1}{s} e^{-s\beta}}_{0} + \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}$$

$s>0$ için

$\Rightarrow$ $L(1) = \frac{1}{s}$, $s>0$ bulunur.

(*) Benzer şekilde $f(x) = c$ (c sabit) için $L(c) = \frac{c}{s}$, $s>0$ dır.

Özellikleri: $L(f(x)) = F(s)$, $L(g(x)) = G(s)$ olsun

1) $L(c_1 f(x) \mp c_2 g(x)) = c_1 L(f(x)) \mp c_2 L(g(x))$ dır (lineerdir.)

2) $L(c) = \frac{c}{s}$, $c \in \mathbb{R}$

3) $L(x) = \frac{1}{s^2}$, $L(x^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $n \in \mathbb{Z}^+$

Örnek: $f(x) = 5x^4 - 4x + 3$ için

$$L(f(x)) = L(5x^4 - 4x + 3) = 5L(x^4) - 4L(x) + 3L(1)$$

$$= 5 \cdot \frac{4!}{s^5} - 4 \cdot \frac{1}{s^2} + 3 \cdot \frac{1}{s}$$

4) $L(e^{ax}) = \frac{1}{s-a}, \quad s > a$

5) $L(\sin ax) = \frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$

6) $L(\cos ax) = \frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$

7) $L(\sinh ax) = \frac{a}{s^2-a^2}, \quad s > |a|$

8) $L(\cosh ax) = \frac{s}{s^2-a^2}, \quad s > |a|$

9) $L(e^{ax} f(x)) = L(f(x))\big|_{s=s-a} = F(s-a), \quad s > a$

1. öteleme özelliği

Örnek: $L(e^{-x} \sin 3x) = L(\sin 3x)\big|_{s=s+1} = \frac{3}{s^2+9}\Big|_{s=s+1}$

$$= \frac{3}{(s+1)^2+9}$$

10) $g(x) = \begin{cases} f(x-a), & x > a \\ 0, & x < a \end{cases}$ $\qquad L(g(x)) = e^{-as} F(s)$

2. öteleme özelliği

Örnek: $g(x) = \begin{cases} (x-2)^3, & x > 2 \\ 0, & x < 2 \end{cases}$ $\qquad L(g(x)) = ?$

$f(x-2) = (x-2)^3 \Rightarrow f(x) = x^3$ olup $a = 2$ için

$L(g(x)) = e^{-2s} L(x^3) = e^{-2s} \cdot \frac{3!}{s^4} = \frac{6e^{-2s}}{s^4}$

11) $L(f(ax)) = \frac{1}{a} L(f(x))\big|_{s=\frac{s}{a}} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$

Örnek: $L(\sin 2x) = \frac{1}{2} L(\sin x)\big|_{s=\frac{s}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{s^2+1}\Big|_{s=\frac{s}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{s^2}{4}+1}$

$$= \frac{2}{s^2+4}$$

12) $L(f'(x)) = sF(s) - f(0)$

$L(f''(x)) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

$L(f'''(x)) = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$

$\vdots$

$L(f^{(n)}(x)) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

örnek: $f(x) = \sin 2x$ için $L(f'(x)) = ?$

$f'(x) = 2\cos 2x$ olup $L(f'(x)) = L(2\cos 2x) = 2 \cdot \frac{s}{s^2+4}$ dur.

veya 12. özellikten

$L(f'(x)) = s \cdot L(f(x)) - f(0) = s \cdot L(\sin 2x) - \sin 2.0$

$= s \cdot \frac{2}{s^2+4} - 0 = \frac{2s}{s^2+4}$ bulunur.

13) $L\left(\int_0^x f(u)du\right) = \frac{1}{s} L(f(x)) = \frac{F(s)}{s}$

örnek: $L\left(\int_0^x e^{-u}\cos 2u\,du\right) = \frac{1}{s} L(e^{-x}\cos 2x)$

$= \frac{1}{s}\left\{L(\cos 2x)\big|_{s=s+1}\right\} = \frac{1}{s}\left\{\frac{s}{s^2+4}\Big|_{s=s+1}\right\}$

$= \frac{1}{s} \frac{s+1}{(s+1)^2+4}$

örnek: $L\Big(e^x \underbrace{\int_0^x e^{3u}u^2du}_{f(x)}\Big) \overset{9.\text{özellikten}}{=} L\left(\int_0^x e^{3u}u^2du\right)\Big|_{s=s-1}$

$\overset{12.\text{özl}}{=} \left\{\frac{1}{s} L(e^{3x}x^2)\right\}\Big|_{s=s-1} \overset{9.\text{özl.}}{=} \left[\frac{1}{s}\left\{L(x^2)\big|_{s=s-3}\right\}\right]\Big|_{s=s-1}$

$= \left(\frac{1}{s}\left(\frac{2!}{s^3}\right)\Big|_{s=s-3}\right)\Big|_{s=s-1} = \left(\frac{1}{s} \frac{2}{(s-3)^3}\right)\Big|_{s=s-1}$

$= \frac{1}{s-1} \cdot \frac{2}{(s-4)^3}$

14) $L(x f(x)) = -\frac{d}{ds} F(s)$

$L(x^2 f(x)) = \frac{d^2}{ds^2} F(s)$

$\vdots$

$L(x^n f(x)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$

Örnek: $L(x^2 e^{3x}) = ?$

9. özellikten $L(x^2 e^{3x}) = L(e^{3x} x^2) = L(x^2)\big|_{s=s-3} = \frac{2!}{s^3}\big|_{s=s-3}$

$$= \frac{2}{(s-3)^3}$$

veya

14. özellikten $L(x^2 e^{3x}) = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} L(e^{3x}) = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-3}\right)$

$$= \frac{d}{ds}\left(\frac{-1}{(s-3)^2}\right) = \frac{2}{(s-3)^3}$$

15) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ sonlu olmak üzere $L\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \int_s^\infty L(f(x))\big|_{s=u} du$

$$= \int_s^\infty F(u)\,du$$

16) (Başlangıç Değer Teoremi): $f(x)$ sürekli, $f'(x)$ parçalı sürekli, $f(x)$ ve $f'(x)$ (Laplace dönüşümünün var olma koşulları) ve $f(x)$ a üstel mertebeden ile $f'(x)$ in belli limitleri var ise

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{s\to\infty} s.F(s) = f(0)$$

dır.

$\Rightarrow$ $F(s)$ belli iken başlangıç değer teoremi ile $f(0)$ değeri bulunabilir.

17) (Son Değer Teoremi): $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{s\to 0} s.F(s)$ dır.

$\Rightarrow$ $F(s)$ belli iken $f(x)$'i bulmadan $x\to\infty$ için $f(x)$ değeri son değer teoremi ile bulunabilir.

Ters Laplace Dönüşümü ve Özellikleri

$F(s) = L(f(x))$ ise $f(x)$ fonksiyonuna $F(s)$ Laplace dönüşümünün ters Laplace dönüşümü denir ve

$$f(x) = L^{-1}(F(s))$$

ile gösterilir.

$$f(x) = L^{-1}(F(s)) = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} F(s)\, e^{sx}\, ds$$

integrali ile hesaplanır. Bu integrali hesaplamak zor olduğundan bunun yerine Laplace dönüşümünün özelliklerinden yararlanılarak ters Laplace dönüşümü bulunur.

Özellikleri $L(f(x)) = F(s)$, $L(g(x)) = G(s)$ } olsun.
$f(x) = L^{-1}(F(s))$ $g(x) = L^{-1}(G(s))$

1) $L^{-1}(c_1 F(s) \mp c_2 G(s)) = c_1 L^{-1}(F(s)) \mp c_2 L^{-1}(G(s))$ lineerdir

2) $L^{-1}(F(s-a)) = e^{ax} f(x)$

Örnek: $F(s) = \dfrac{1}{s^2-2s+2}$ ise $f(x) = ?$

$$F(s) = \frac{1}{s^2-2s+2} = \frac{1}{(s-1)^2+1}$$

$$f(x) = L^{-1}(F(s)) = L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2+1}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\Big|_{s=s-1}$$

$$= e^{x} \cdot \sin x$$

Örnek: $L(x) = \dfrac{1}{s^2} \Rightarrow L^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2}\right) = x$

$$L(x^3) = \frac{3!}{s^4} \Rightarrow L^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right) = \frac{1}{3!}x^3$$

$$L(e^{3x}) = \frac{1}{s-3} \Rightarrow L^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right) = e^{3x}$$

$$L(e^{ax}) = \frac{1}{s-a} \Rightarrow L^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right) = e^{ax}$$

$$L(\sin 2x) = \frac{2}{s^2+4} \Rightarrow L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) = \frac{1}{2}\sin 2x$$

3) $L^{-1}(e^{-as}F(s)) = \begin{cases} f(x-a), & x>a \\ 0, & x<a \end{cases}$ dır.

4) $L^{-1}(F(as)) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right)$

Örnek: $L^{-1}\left(\frac{s}{4s^2+16}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{4}\ \frac{s}{s^2+4}\right) = \frac{1}{4} L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)$

$= \frac{1}{4}\cos 2x$

5) $L^{-1}\left(\frac{d^n}{ds^n} F(s)\right) = (-1)^n x^n f(x)$

6) $L^{-1}\left(\int_s^\infty F(u)du\right) = \frac{f(x)}{x}$

Not: Dirac Delta fonksiyonu : $\delta(t-a) = \begin{cases} \infty, & t=a \\ 0, & t\neq a \end{cases}$

olmak üzere

$L(\delta(t-a)) = e^{-sa}$

ve $a=0$ için

$L(\delta(t)) = 1$ dır.

Buna göre $L^{-1}(1) = \delta(t)$ olur.

7) $f(0)=0$ ise $L^{-1}(sF(s)) = f'(x)$ dır

$f(0)\neq 0$ ise $L^{-1}(sF(s)) = f(0)\,\delta(t) + f'(t)$ dır

---

$L(f'(t)) = sF(s) - f(0)$ idi. Her iki tarafın ters Laplace dönüşümü alınırsa

$f'(t) = L^{-1}(sF(s) - f(0))$

$f'(t) = L^{-1}(sF(s)) - \underbrace{f(0)}_{\text{sabit}}\cdot L^{-1}(1)$

$f'(t) = L^{-1}(sF(s)) - f(0)\cdot\delta(t)$

$\Rightarrow L^{-1}(sF(s)) = f(0)\,\delta(t) + f'(t)$ olur.

8) $L^{-1}\left(\frac{F(s)}{s}\right) = \int_0^x L^{-1}(F(s))\big|_{s=u}\, du = \int_0^x f(u)\,du$

9) Konvolisyon özelliği

$$L^{-1}(F(s).G(s)) = \int_0^x f(u)\, g(x-u)\,du \quad \text{dır}$$

Burada

$$f * g = \int_0^x f(u)\, g(x-u)\,du$$

olmak üzere $f*g$ ye f ile g nin konvolisyonu denir.

Buna göre

$$L\left(\int_0^x f(u)\, g(x-u)\,du\right) = F(s).G(s) \quad \text{olmaktadır}$$

Laplace Dönüşümü ile Diferansiyel Denklemlerin Çözümünü Bulma

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + P_2 y^{(n-2)} + \dots + P_{n-1} y' + P_n y = B(x)$$

şeklinde n. mertebeden sabit katsayılı lineer homojen olmayan denklemi verilsin. Bu denklemin

$$y(0) = a_0 \, , \, y'(0) = a_1 \, , \dots \, y^{(n-1)}(0) = a_{n-1}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunabilir.

[redacted]

⇒ Başlangıç koşulları $x=0$ için verilirse daha kolay çözüm bulunur.

$$L(y(x)) = Y(s) \, ,$$

$$L(y'(x)) = sY(s) - y(0)$$

$$L(y''(x)) = s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)$$

$$L(y'''(x)) = s^3 Y(s) - s^2 y(0) - s y'(0) - y''(0)$$

$$\vdots$$

$$L(y^{(n)}(x)) = s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)$$

ve $y(x) = L^{-1}(Y(s))$

özelliklerinden yararlanılacaktır.

Örnek: $y' + 2y = 1 \, , \, y(0) = 0$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

Her iki tarafın Laplace dönüşümü alınırsa

$$L(y' + 2y) = L(1)$$

$$\Rightarrow L(y') + 2L(y) = L(1)$$

$$\Rightarrow sY(s) - \underbrace{y(0)}_{0} + 2Y(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s)\{s+2\} = \frac{1}{s}$$

8

CamScanner ile tarandı

$\Rightarrow Y(s) = \dfrac{1}{s(s+2)}$ olur. Buradan ters Laplace dönüşümü

alınırsa

$y(x) = L^{-1}(Y(s)) = L^{-1}\left(\dfrac{1}{s(s+2)}\right)$ olur.

$\dfrac{1}{s(s+2)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+2}$ $\quad = L^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s+2}\right)$

$1 = A(s+2) + Bs$ $\quad = \dfrac{1}{2} L^{-1}\left(\dfrac{1}{s}\right) - \dfrac{1}{2} L^{-1}\left(\dfrac{1}{s+2}\right)$

$s=0 \Rightarrow \quad A = \dfrac{1}{2}$ $\quad = \dfrac{1}{2}\cdot 1 - \dfrac{1}{2}\cdot e^{-2x}$

$s=-2 \Rightarrow \quad B = -\dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{1}{2}(1-e^{-2x})$

$\Rightarrow y(x) = \dfrac{1}{2}(1-e^{-2x})$ çözümü bulunur.

$y' + 2y = 1$ LD $\Rightarrow \lambda(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}$ olsun.

$y\cdot e^{2x} = \int 1\cdot e^{2x}dx + c \Rightarrow ye^{2x} = \dfrac{1}{2}e^{2x} + c$

$y = \dfrac{1}{2} + ce^{-2x}$ genel çözüm

$y(0) = 0$ için $\quad 0 = \dfrac{1}{2} + c\cdot 1 \Rightarrow c = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}e^{-2x}$

$y = \dfrac{1}{2}(1-e^{-2x})$ bulunur.

Örnek: $y'' - 2y' + y = 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ çözümünü bulunuz

$$L(y'') - 2L(y') + L(y) = 2L(1)$$

$$s^2Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{0} - \underbrace{y'(0)}_{1} - 2(sY(s) - \underbrace{y(0)}_{0}) + Y(s) = 2\frac{1}{s}$$

$$s^2Y(s) - 1 - 2sY(s) + Y(s) = \frac{2}{s}$$

$$(s^2 - 2s + 1)Y(s) = 1 + \frac{2}{s}$$

$$Y(s) = \left(1 + \frac{2}{s}\right)\frac{1}{(s-1)^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2}{s(s-1)^2}$$

$$y(x) = L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{2}{s(s-1)^2}\right)$$

$$= L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\Big|_{s=s-1}\right) + L^{-1}\left(\frac{2}{s}\right) - L^{-1}\left(\frac{2}{s-1}\right) + L^{-1}\left(\frac{2}{(s-1)^2}\right)$$

$$= e^x \cdot x + 2 - 2e^x + 2 \cdot xe^x$$

$$\frac{2}{s(s-1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

$$\underbrace{y(x) = 3xe^x - 2e^x + 2}_{\text{bulunur.}}$$

$$2 = A(s-1)^2 + Bs(s-1) + Cs$$

$s = 0 \Rightarrow A = 2$

$s = 1 \Rightarrow C = 2$

$s = -1 \Rightarrow B = -2$

Örnek: $y'' + y = e^x$, $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 0$ çözümünü bulunuz

$$L(y'') + L(y) = L(e^x)$$

$y(0) = a$, $y'(0) = b$ olsun.

$$s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$(s^2+1) Y(s) - sa - b = \frac{1}{s-1}$$

$$Y(s) = \frac{sa+b}{s^2+1} + \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}$$

$$y(x) = a \cdot \underbrace{L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)}_{\cos x} + b \underbrace{L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)}_{\sin x} + L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)(s^2+1)}\right)$$

$$= a\cos x + b \sin x + \frac{1}{2} L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) - \frac{1}{2} L^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2+1}\right)$$

$$\frac{1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

$$1 = A(s^2+1) + (Bs+C)(s-1)$$

$A = 1/2$, $B = \frac{1}{2}$ $C = -\frac{1}{2}$

$$\underbrace{y(x) = a\cos x + b \sin x + \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x}_{\text{olur.}}$$

$$y(\pi) = 0 \Rightarrow \quad 0 = -a + 0 + \frac{1}{2} e^{\pi} + \frac{1}{2} + 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}(1+e^{\pi})$$

$$y'(x) = -a \sin x + b\cos x + \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$$

$$y'(\pi) = 0 \Rightarrow \quad 0 = 0 - b + \frac{1}{2} e^{\pi} + 0 + \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}(1+e^{\pi})$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}(\cancel{1}+e^{\pi})\cos x + \frac{1}{2}(\cancel{1}+e^{\pi})\sin x + \frac{1}{2}e^x \cancel{- \frac{1}{2}\cos x} \cancel{- \frac{1}{2}\sin x}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{e^{\pi}}{2}(\cos x + \sin x) + \frac{1}{2} e^x$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}\left\{ e^x + e^{\pi}(\sin x + \cos x)\right\}$$ çözümü bulunur.

Örnek: $y''' - y'' + y' - y = 0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$, $y''(0)=0$ çözümünü bulunuz.

$$L(y''') - L(y'') + L(y') - L(y) = L(0)$$

$$s^3Y(s) - s^2\underbrace{y(0)}_{1} - s\underbrace{y'(0)}_{0} - \underbrace{y''(0)}_{0} - \left(s^2Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{1} - \underbrace{y'(0)}_{0}\right) + sY(s) - \underbrace{y(0)}_{1} - Y(s) = 0$$

$$s^3Y(s) - s^2 - s^2Y(s) + s + sY(s) - 1 - Y(s) = 0$$

$$\left(s^3 - s^2 + s - 1\right)Y(s) = s^2 - s + 1$$

$$Y(s) = \frac{s^2 - s + 1}{s^3 - s^2 + s - 1}$$

$$\frac{s^2 - s + 1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs + C}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{s^2 - s + 1}{(s-1)(s^2+1)}$$

$A = \frac{1}{2}$

$B = \frac{1}{2}$ $\quad C = -\frac{1}{2}$

$$Y(s) = \frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{2}\frac{s-1}{(s^2+1)}$$

$$y(x) = \frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{s-1}{s^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) - \frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$$

$$y(x) = \frac{1}{2}\left\{e^x + \cos x - \sin x\right\}$$

Örnek: $y''+y' = e^x + 1, \quad y(0)=y'(0)=0$

$L(y'') + L(y') = L(e^x) + L(1)$

$s^2Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{0} - \underbrace{y'(0)}_{0} + sY(s) - \underbrace{y(0)}_{0} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s}$

$(s^2+s)Y(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s}$

$\frac{1}{s(s+1)(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-1}$

$Y(s) = \frac{1}{s^2+s}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s}\right)$

$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1}$

$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)(s-1)} + \frac{1}{s^2(s+1)}$

$Y(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{2(s-1)} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}$

$Y(s) = -\frac{2}{s} + \frac{3}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{s^2}$

$y(x) = -2L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{3}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)$

$y(x) = -2\cdot 1 + \frac{3}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^x + x$

$y(x) = x - 2 + \frac{3}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^x$ bulunur.

$y''+y' = 0 \Rightarrow \lambda^2+\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda+1)=0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow y_1 = 1$
$\lambda = -1 \Rightarrow y_2 = e^{-x}$

$y_h = c_1 + c_2 e^{-x}$

$y_ö = Ae^x + Bx, \quad y_ö' = Ae^x + B, \quad y_ö'' = Ae^x$

$Ae^x + Ae^x + B = e^x + 1 \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \Rightarrow y_ö = \frac{1}{2}e^x + x$
$B = 1$

$y = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}e^x + x$

$y(0)=0 \Rightarrow 0 = c_1 + c_1 + \frac{1}{2} \Rightarrow c_1 + c_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -2 + \frac{3}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^x + x$

$y' = -c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}e^x + 1$

$y'(0) = 0 \Rightarrow 0 = -c_2 + \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow c_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow c_1 = -2$

Örnek: $y'' + xy' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ çözümünü bulunuz.

$L(y'') + L(xy') - L(y) = L(0)$

$s^2 Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{0} - \underbrace{y'(0)}_{1} - \frac{d}{ds}\{sY(s) - \underbrace{y(0)}_{0}\} - Y(s) = 0$

(*) $L(x f(x)) = -\frac{d}{ds} F(s) = -\frac{d}{ds} L(f(x))$

$s^2 Y(s) - 1 - Y(s) - s \cdot Y'(s) - Y(s) = 0$

(*) $L(x f'(x)) = -\frac{d}{ds} L(f'(x)) = -\frac{d}{ds}(sF(s) - f(0))$

$(s^2 - 2)Y(s) - sY'(s) = 1$

$Y'(s) - \left(\frac{s^2-2}{s}\right) Y(s) = -\frac{1}{s}$ Lineer denklem

$\lambda(s) = e^{-\int \left(\frac{s^2-2}{s}\right) ds} = e^{-\frac{s^2}{2} + 2\ln s} = e^{-\frac{s^2}{2}} \cdot s^2$ olmak üzere

$s^2 e^{-\frac{s^2}{2}} Y(s) = \int -\frac{1}{s} s^2 e^{-\frac{s^2}{2}} ds + c$

$s^2 e^{-\frac{s^2}{2}} Y(s) = e^{-\frac{s^2}{2}} + c$

$Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{c}{s^2} e^{\frac{s^2}{2}}$

$\lim_{s \to \infty} sY(s) = y(0)$ olduğundan

$\lim_{s \to \infty} \frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{s} = \lim_{s \to \infty} \frac{s e^{\frac{s^2}{2}}}{1} = \infty$

$\lim_{s \to \infty} s\left(\frac{1}{s^2} + \frac{c}{s^2} e^{\frac{s^2}{2}}\right) = 0$

$0 + c\infty = 0 \Rightarrow c = 0$ olmalıdır.

$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2}$

$\Rightarrow y(x) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) = x$

$\Rightarrow y(x) = x$

bulunur

Örnek: $xy'' + y' = 2x \quad , y(0) = -1 \; , y'(0) = 1$ çözümünü bulunuz.

$$L(xy'') + L(y') = L(2x)$$

$$-\frac{d}{ds} L(y'') + sY(s) - y(0) = 2 \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$-\frac{d}{ds}\left(s^2 Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{-1} - \underbrace{y'(0)}_{1}\right) + sY(s) + 1 = \frac{2}{s^2}$$

$$-2s \cdot Y(s) - s^2 Y'(s) - \cancel{1} + sY(s) + \cancel{1} = \frac{2}{s^2}$$

$$-s^2 Y'(s) - sY(s) = \frac{2}{s^2}$$

$$Y'(s) + \frac{1}{s} Y(s) = -\frac{2}{s^4} \qquad \text{Lineer denklem}$$

$$\lambda(s) = e^{\int \frac{1}{s} ds} = e^{\ln s} = s \qquad \text{olmak üzere}$$

$$s \cdot Y(s) = -\int \frac{2}{s^4} \cdot s \, ds + c$$

$$sY(s) = \frac{1}{s^2} + c$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{c}{s}$$

$$\lim_{s \to \infty} sY(s) = y(0) \Rightarrow \lim_{s \to \infty}\left(\frac{1}{s^2} + c\right) = -1$$

$$0 + c = -1 \Rightarrow c = -1$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s}$$

$$y(x) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1 \qquad \text{bulunur.}$$

o

$$Y(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{c}{s} \rightarrow y(x) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right) + c\, L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{2}x^2 + c$$

bulunur. Buradan

$y(0) = -1$ olduğundan $-1 = 0 + c \Rightarrow c = -1$ bulunur. Buna göre

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1 \qquad \text{istenen özel çözümdür}$$